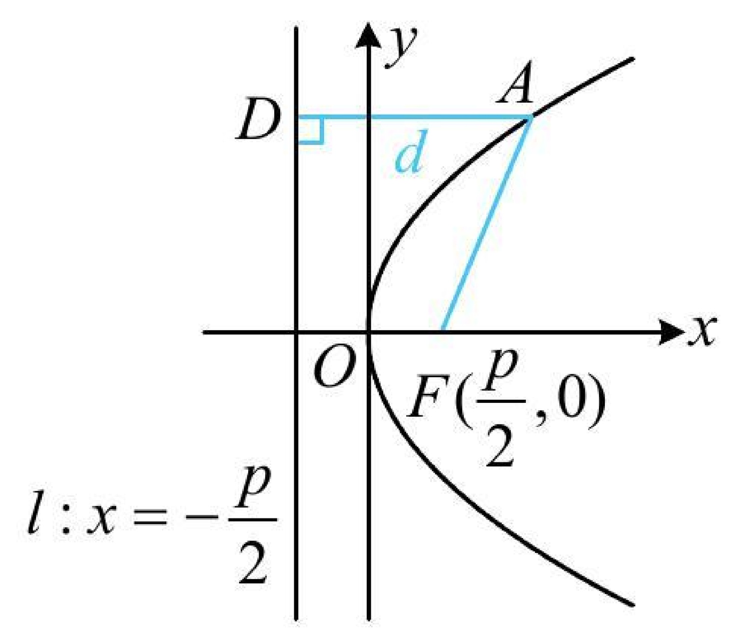
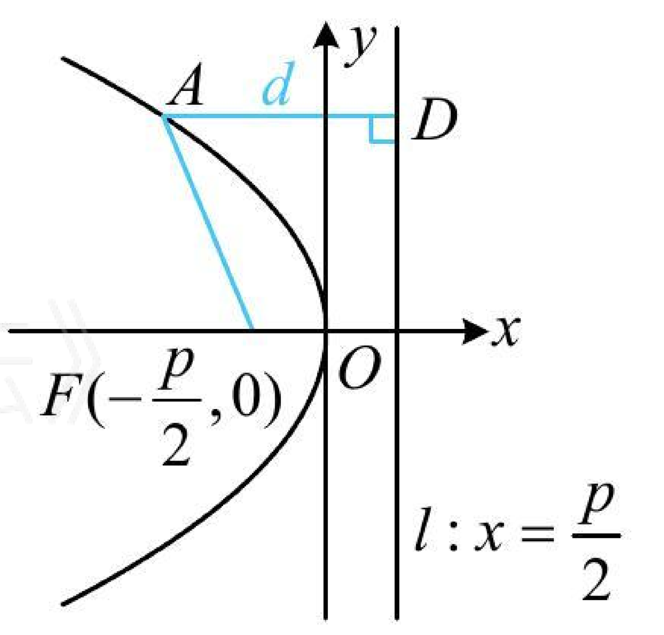
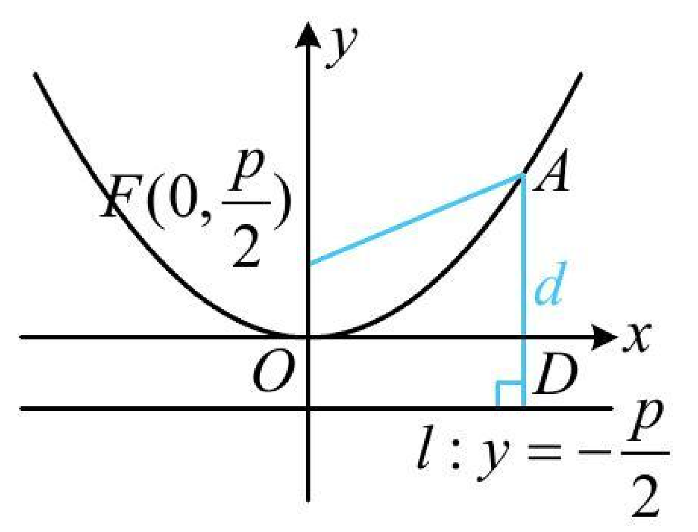
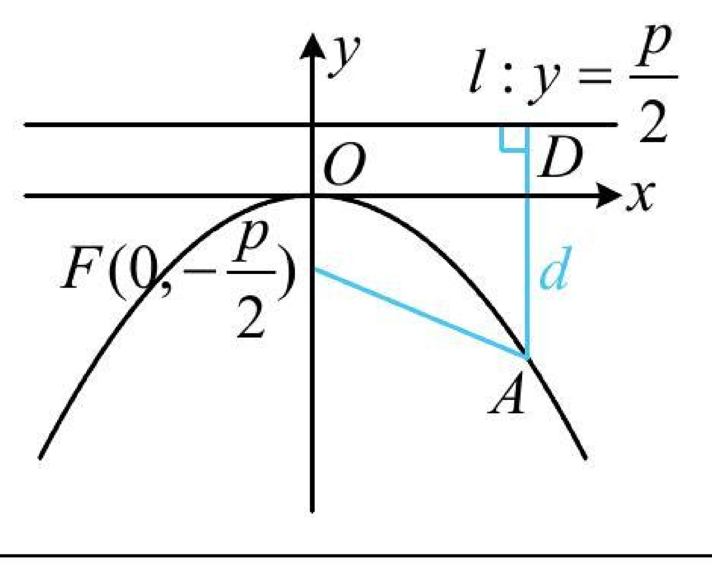
模块五 抛物线与方程

第 1 节 抛物线定义、标准方程及简单几何性质（★☆）

内容提要

1．抛物线的定义：平面上到定点 F 的距离与到定直线 l（不过定点 F）的距离相等的点的轨迹是抛物线，其中定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

2．抛物线的标准方程与简单几何性质：

定义	标准方程 $(p>0)$	焦点	准线	范围	对称轴	顶点	图形
$\lvert AF\rvert=d$	$y^2=2px$	$(\frac{p}{2},0)$	$x=-\frac{p}{2}$	$x\ge 0$ $y\in\mathbf{R}$	x 轴	原点	
	$y^2=-2px$	$(-\frac{p}{2},0)$	$x=\frac{p}{2}$	$x\le 0$ $y\in\mathbf{R}$	x 轴	原点	
	$x^2=2py$	$(0,\frac{p}{2})$	$y=-\frac{p}{2}$	$x\in\mathbf{R}$ $y\ge 0$	y 轴	原点	
	$x^2=-2py$	$(0,-\frac{p}{2})$	$y=\frac{p}{2}$	$x\in\mathbf{R}$ $y\le 0$	y 轴	原点	

3．抛物线上的点到焦点 F 的距离可用坐标表示，例如开口向右的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 中，若点 A 在抛物线上，且 $AD\perp$ 准线于 D，如上表中第 1 个图，有 $\lvert AF\rvert=\lvert AD\rvert=x_A+\frac{p}{2}$，其余开口的抛物线类似.

典型例题

类型Ⅰ：抛物线的标准方程与简单几何性质

【例 1】若抛物线 C 的顶点在原点，焦点坐标为 $(\frac{3}{2},0)$，则抛物线 C 的标准方程为_____，准线方程是_____.

解析：先判断开口，并设标准方程，焦点为 $(\frac{3}{2},0)\Rightarrow$ 开口向右，可设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，

则其焦点坐标为 $(\frac{p}{2},0)$，由题意，$\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $p=3$，故 C 的方程为 $y^2=6x$，准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.

答案： $y^2=6x$，$x=-\frac{3}{2}$

【变式 1】顶点在原点，对称轴为坐标轴的抛物线 C 经过点 $A(2,1)$，则 C 的方程为_____.

解析：抛物线过点 $A(2,1)$，有如图所示的两种情况，下面分别考虑，

若开口向右，可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，

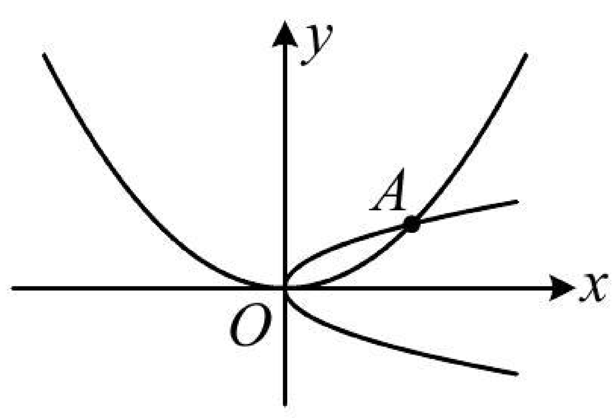
将点 $A(2,1)$ 代入可得：$1^2=2p\cdot 2$，解得：$p=\frac{1}{4}$，所以 C 的方程为 $y^2=\frac{1}{2}x$；

若开口向上，可设抛物线 C 的方程为 $x^2=2my(m>0)$，

将点 $A(2,1)$ 代入可得：$2^2=2m$，解得：$m=2$，所以 C 的方程为 $x^2=4y$；

综上所述，C 的方程为 $y^2=\frac{1}{2}x$ 或 $x^2=4y$.

答案： $y^2=\frac{1}{2}x$ 或 $x^2=4y$



【变式 2】若抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程为 $y=-\frac{1}{8}$，则 $a=$_____.

解析：先把所给方程化为标准方程，即把平方项系数化 1，并判断开口，$y=ax^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{a}y$，

由抛物线的准线方程是 $y=-\frac{1}{8}$ 知抛物线开口向上，所以 $a>0$，且 $2p=\frac{1}{a}$，从而 $p=\frac{1}{2a}$，

故抛物线的准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$，与 $y=-\frac{1}{8}$ 比较可得 $-\frac{1}{4a}=-\frac{1}{8}$，解得：$a=2$.

答案：2

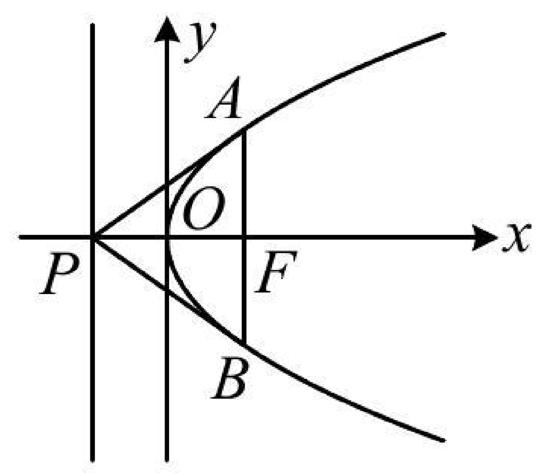
【例 2】已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴交于点 P，过 F 且垂直于 x 轴的直线与抛物线交于 A，B 两点，若 ΔPAB 的面积为 2，则 $p=$_____.

解析：如图，可以 AB 为底，PF 为高来计算 ΔPAB 的面积，下面先求 $|AB|$，

将 $x=\dfrac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 解得：$y=\pm p$，所以 $|AB|=2p$，

又 $|PF|=p$，所以 $S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|PF|=\dfrac{1}{2}\cdot 2p\cdot p=p^2$，由题意，$S_{\Delta PAB}=2$，所以 $p^2=2$，故 $p=\sqrt{2}$.

答案： $\sqrt{2}$



类型Ⅱ：抛物线定义的运用

【例 3】（2020·新课标Ⅰ卷）已知 A 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p=$（　　）

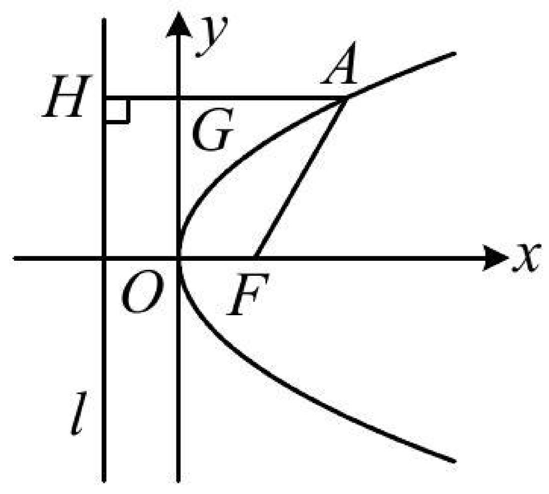
（A）2　（B）3　（C）6　（D）9

解析： 如图，涉及抛物线上的点到焦点的距离，考虑抛物线的定义，

设焦点为 $F(\dfrac{p}{2},0)$，准线为 $l:x=-\dfrac{p}{2}$，作 $AH\perp l$ 于 H，交 y 轴于 G，

由抛物线定义，$|AH|=|AF|=12$，又 $|AG|=9$，所以 $|HG|=|AH|-|AG|=12-9=3$，即 $\dfrac{p}{2}=3$，故 $p=6$.

答案： C



【反思】 涉及抛物线上的点到焦点的距离问题，可优先往抛物线定义上考虑.

【变式 1】（2022·全国乙卷）设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$（　　）

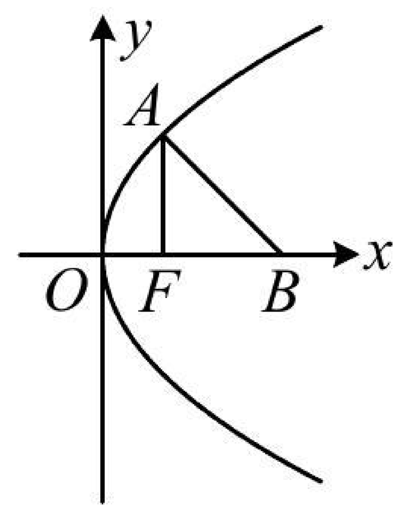
（A）2　（B）$2\sqrt{2}$　（C）3　（D）$3\sqrt{2}$

解析： 如图，只要求出 $|AF|$，就可结合抛物线定义求得 A 的坐标，进而求出 $|AB|$，

由题意，$F(1,0)$，$B(3,0)$，所以 $|BF|=2$，因为 $|AF|=|BF|$，所以 $|AF|=2$，由内容提要 3，

$|AF|=x_A+\dfrac{p}{2}=x_A+1$，所以 $x_A+1=2$，从而 $x_A=1$，故 $y_A^2=4x_A=4$，故 $|AB|=\sqrt{(x_A-3)^2+y_A^2}=2\sqrt{2}$.

答案： B



【变式 2】点 P 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上的动点，设点 P 到抛物线准线的距离为 d_1，到直线 $l: x - y + 2 = 0$ 的距离为 d_2，则 $d_1 + d_2$ 的最小值为_____.

解析：如图，直接分析 $d_1 + d_2$ 的最小值不易，可考虑用定义将 d_1 转化为 $|PF|$ 来看，

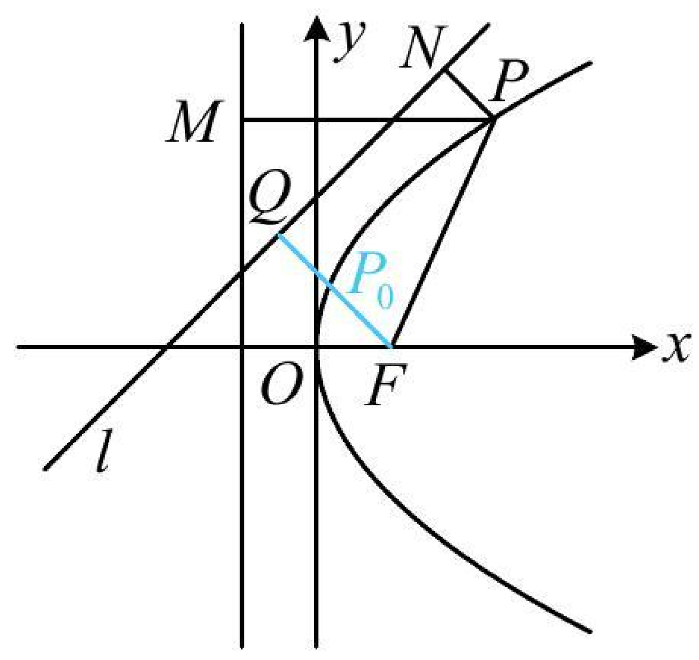
设抛物线的焦点为 $F(1,0)$，由抛物线的定义知 $d_1 = |PF|$，所以 $d_1 + d_2 = |PF| + d_2$ ①，

如图，过 F 作 $FQ \perp l$ 于 Q，过 P 作 $PN \perp l$ 于 N，则 $d_2 = |PN|$，

代入①得：$d_1 + d_2 = |PF| + |PN| \geq |FQ| = \dfrac{|1+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当点 P 为线段 FQ 与抛物线交点 P_0 时取等号，所以 $(d_1 + d_2)_{\min} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$



【总结】只要涉及抛物线上的点到焦点的距离，不管问什么，最常见的思考方向都是利用定义转换长度.

强化训练

1.（2023·四川成都模拟·★）抛物线 $x=4y^2$ 的准线方程是_____.

2.（2023·全国乙卷·★）已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，则点 A 到 C 的准线的距离为_____.

3.（2021·新高考Ⅱ卷·★）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $p=$（　　）

（A）1　（B）2　（C）$2\sqrt{2}$　（D）4

4.（2023·内蒙古模拟·★）顶点在原点，对称轴为坐标轴，且经过 $P(4,-2)$ 的抛物线的标准方程是（　　）

（A）$y^2=x$ 或 $x^2=y$　（B）$y^2=-x$ 或 $x^2=8y$　（C）$x^2=-8y$ 或 $y^2=x$　（D）$x^2=-8y$ 或 $y^2=-x$

5.（2023·陕西渭南二模·★★）将抛物线 $y^2=mx$ 绕其顶点顺时针旋转 90° 后，正好与抛物线 $y=2x^2$ 重合，则 $m=$（　　）

（A）$-\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）-2　（D）2

6．（2022 • 上海模拟 • ★★）已知点 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 P 在抛物线上且横坐标为 8，O 为原点，若 ΔOFP 的面积为 $2\sqrt{2}$，则该抛物线的准线方程为_____.

7．（2020 • 北京卷 • ★）设抛物线的顶点为 O，焦点为 F，准线为 l，P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线（　　）

（A）经过点 O　（B）经过点 P　（C）平行于直线 OP　（D）垂直于直线 OP

8．（2022 • 广东模拟 • ★★）已知点 $A(m,2)$ 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B，若 ΔAOB 的面积为 2，其中 O 为原点，则 p 等于（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）4

9．（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知点 $Q(2\sqrt{2},0)$ 及抛物线 $x^2=4y$ 上一动点 $P(x,y)$，则 $y+|PQ|$ 的最小值是（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）3